

## Lineare Algebra II

Blatt 10

Abgabe: 12.07.2021, 10 Uhr

**Gruppennummer angeben!**

### Aufgabe 1 (3 Punkte).

Seien  $P$  und  $Q$  zwei nicht-konstante Polynome aus dem Polynomring  $\mathbb{K}[T]$  über einem beliebigen Körper  $\mathbb{K}$  derart, dass das Polynom  $P$  über  $\mathbb{K}[T]$  in Linearfaktoren zerfällt und  $Q$  das Polynom  $P$  teilt. Zeige induktiv über den Grad von  $P$ , dass auch  $Q$  in Linearfaktoren zerfällt.

### Aufgabe 2 (4 Punkte).

Betrachte auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  aller reellen  $2 \times 2$ -Matrizen die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \det(A - B) - \det(A) - \det(B) \end{aligned}$$

- (a) Zeige, dass  $\varphi$  eine symmetrische Bilinearform ist. Ist  $\varphi$  positiv definit?
- (b) Bestimme den Rang und die Signatur von  $\varphi$ .

### Aufgabe 3 (7 Punkte).

Betrachte für  $n > 1$  im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  die quadratische Form

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

- (a) Bestimme die Darstellungsmatrix der von  $Q$  bestimmten symmetrischen Bilinearform  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  bezüglich der Standardbasis.
- (b) Zeige mit elementaren Methoden (ohne das charakteristische Polynom zu berechnen), dass 0 und  $n$  Eigenwerte der Darstellungsmatrix sind. Was sind ihre geometrischen Vielfachheiten?
- (c) Bestimme den Rang sowie die Signatur von  $\varphi$ ? Ist  $\varphi$  positiv definit?

### Aufgabe 4 (6 Punkte).

Betrachte folgende *Quadrik*  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{S} = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 + 2x_1 - x_2 = 1\}.$$

- (a) Mit Hilfe einer Variablensubstitution  $y_i = x_i + r_i$  schreibe die Quadrik in der Form  $\bar{y} A \bar{y}^t = b$  für eine reelle Zahl  $b$ .
- (b) Bestimme die Hauptachsen.
- (c) Welches geometrische Objekt (Parabel, Ellipse, ...) beschreibt  $\mathcal{S}$ ?